MATRICES

Definición: Se llama *Matriz de orden m×n* ,definida sobre el cuerpo de los números reales, a un conjunto de m×n elementos colocados en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots. & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde a_{ij} ∈ℝ (*i* indica la fila y *j* indica la columna) recibe el nombre de término general de la matriz.

Abreviadamente, las matrices también se denotan así A = $\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

A una matriz de orden m×n se le llama también de *dimensión* m×n.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times4}$

Clasificación de Matrices:

a) ***Matriz cuadrada***: se llama así a las matrices que tienen igual número de filas y de columnas, es decir m = n. Al conjunto de las matrices cuadradas se denota $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$.
En una matriz cuadrada los elementos a_{ij} tales que *i* =*j* , forman lo que se llama la diagonal principal de la matriz.

b) ***Matriz fila***: es aquella que tiene una sola fila, es decir, de dimensión 1×n.

c) ***Matriz columna***: la formada por una sola columna, es decir, de dimensión m×1.

d) ***Matriz nula***: es aquella en la que todos sus elementos son ceros.

e) ***Matriz simétrica***: una matriz cuadrada es simétrica si $a_{ij} = a_{ji} \ \ \forall\, i, j$; es decir, si son iguales los elementos que ocupan lugares simétricos respecto a su diagonal principal.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) ***Matriz diagonal***: una matriz cuadrada es diagonal si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

g) ***Matriz unidad o identidad***: se llama matriz unidad (o identidad) de orden n a la matriz diagonal de dicho orden en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1. La denotamos por I_n.

Ejemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

OPERACIONES CON MATRICES

a) ***Suma de matrices:***

La suma de dos matrices A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) de la misma dimensión (es decir, pertenecientes a $\mathcal{M}_{\mathrm{m\times n}}$) es otra matriz S = (s_{ij}) $\in \mathcal{M}_{\mathrm{m\times n}}$ cuyo término general es

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\, i,j \quad ; \quad \text{se denota A+B.}$$

b) ***Producto de matrices:***

Sean A = $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{m\times n}}$ y B = $(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}$.

Se llama matriz producto de A y B, y se denota $A \cdot B$, a la matriz C = $(c_{ij}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{m}\times p}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j+}a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots \dots \dots . . + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots\dots & \dots\dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & \dots\dots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; a_{i3} \;\; \dots\dots \;\; a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots\dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots\dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots\dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

El elemento c_{ij} de la matriz producto $A \cdot B$ se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por el elemento correspondiente de la columna j de la matriz B y sumando estos productos.

Observaciones:

El producto $A \cdot B$ sólo puede efectuarse si el nº de columnas de A coincide con el nº de filas de B. La matriz producto tendrá tantas filas como tiene A y tantas columnas como tiene B., es decir:

$$\left.\begin{matrix} A \in \mathcal{M}_{m\times n} \\ B \in \mathcal{M}_{n\times p} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{C} \in \mathcal{M}_{\mathrm{m}\times p}$$

El producto **no es conmutativo**: en general $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Definición: Dada una matriz A de orden m×n, se llama matriz traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando sus filas por sus columnas. La denotamos A^t.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ su traspuesta será $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

DETERMINANTES

Definición: Sea $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$

Se llama ***determinante de A***, y se denota por $|A|$ *o* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, al número

real que se obtiene sumando todos los productos posibles de n elementos de la matriz *A*, de modo que cada producto contenga un solo elemento de cada fila y un solo elemento de cada columna, con el signo + ó – según el índice de la permutación de las columnas sea par o impar.

Determinantes de 2º orden.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ el determinante de la matriz es $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Por tanto el determinante de una matriz de orden 2 es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Determinantes de 3er orden.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

El cálculo de un determinante de orden tres se puede realizar mediante la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sumandos positivos Sumandos negativos

Por tanto:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} - a_{13}\, a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Notemos que, a partir de 4, el cálculo directo, aplicando la definición, de determinantes de orden 4, 5, 6…

es muy laborioso, pues tendrían en su desarrollo 4!=24, 5!=120, 6!=720… términos, respectivamente.

Definición: Sea $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ y sea $a_{ij} \in A$. Se llama ***menor complementario de*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ al determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo en A la fila i y la columna j, es decir, la fila y la columna en las que está a_{ij}. Lo denotaremos por α_{ij}.

Definición: Sea $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ y sea $a_{ij} \in A$. Se llama ***adjunto de*** $\boldsymbol{a_{ij}}$,y lo denotamos A_{ij}, a

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Definición: Se llama ***matriz adjunta*** de una matriz cuadrada *A*, a la matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de *A*. La representamos por A^d.

MATRIZ INVERSA

Definición: Dos ***matrices*** de orden n son ***inversas*** si su producto es la matriz unidad. Es decir:

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y $B \in \mathcal{M}_n$, diremos que A es inversa de B $\Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A = I_n$

A la matriz inversa de A se le denota A^{-1}.

La inversa viene dada por la expresión: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t}$

Obervación: La matriz A no tiene inversa si su determinante es nulo.

Cálculo de la matriz inversa:

Utilizamos la expresión $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^t$

Ejemplo: Cálculo de la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Comprobamos que existe la inversa: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$

Calculamos la matriz adjunta $A^d = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su traspuesta $(A^d)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto la inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^t = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$